9-й класс

1. Можно ли найти натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_{2012}$, среди которых нет двух одинаковых, так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_{2012}}=1?$$

Ответ: можно.

Решение.

Например, можно поступить следующим образом:

$$\begin{aligned}1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2^{2010}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2009}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2^{2009}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{3\cdot 2^{2009}}+\frac{1}{6\cdot 2^{2009}}.\end{aligned}$$

2. Коля случайно стер с доски пример на вычитание. Сам пример он не запомнил, но обратил внимание на то, что числа были целые и сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности была равна то ли 2011, то ли 2012. Можно ли определить, чему было равно уменьшаемое в стертом примере? Ответ поясните.

Ответ: 1006.

Решение.

Поскольку сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому, то сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна удвоенному уменьшаемому. Числа были целые, следовательно, их сумма могла быть равна только 2012. И уменьшаемое равно половине данной суммы.

3. Мы записываем на доске многочлен $f(x)$, все коэффициенты которого — некоторые цифры от 0 до 9, по убыванию степеней, не пропуская ни одной из них (таким образом, некоторые коэффициенты могут быть равны нулю). Затем мы стираем с доски всё, кроме коэффициентов, получая целое неотрицательное число $N\big(f(x)\big)$ (например, если $f(x) = 7x^2 + 5 = 7x^2 + 0x + 5$, то $N\big(f(x)\big) = 705$). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени не выше 8, все коэффициенты которых — 0 или 1. Верно ли равенство $N\big(f(x) \cdot g(x)\big) = N\big(f(x)\big) \cdot N\big(g(x)\big)$?

Ответ: верно.

Решение.

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в произведении $f(x) \cdot g(x)$ получается многочлен $h(x)$ степени не выше 16, все коэффициенты которого — цифры (наибольший из них, равный 9, может появиться при x^8). Теперь в тождестве $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ осталось положить $x = 10$.

4. Точки сторон правильного треугольника раскрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

Решение.

Предположим, что нет прямоугольного треугольника с вершинами одного цвета. Разделим каждую сторону правильного треугольника двумя точками на три равные части. Эти точки образуют правильный шестиугольник. Если две его противоположные вершины одного цвета, то все остальные вершины будут второго цвета, а значит, есть прямоугольный треугольник с вершинами второго цвета. Следовательно, противоположные вершины шестиугольника разноцветные. Поэтому найдутся две соседние разноцветные вершины; противоположные им вершины тоже разноцветные. Одна из этих пар разноцветных вершин лежит на стороне треугольника. Точки этой стороны, отличные от вершин шестиугольника не могут быть ни первого, ни второго цвета. Получено противоречие.

5. В каждой клетке прямоугольной таблицы $m \times n$ (m строк и n столбцов) записано натуральное число. За один ход разрешается либо удвоить числа в каком-нибудь столбце, либо вычесть 1 из всех чисел какой-нибудь строки. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице стали равными 0.

Решение.

Достаточно научиться обнулять строку, поскольку последующие операции с другими строками и столбцами в ней уже ничего не изменят ($0 \cdot 2 = 0$). Для краткости назовём вычитание 1 из чисел строки операцией «а», а удвоение чисел столбца — операцией «б». Итак, выделяем произвольную строку, находим в ней наименьшее число (может быть, несколько) и с помощью операции «а» превращаем его в 1 (если наименьшее число уже было единицей, ничего не делаем). Все числа этой строки остаются натуральными. Далее применяем операцию «б» к тем столбцам, где в выделенной строке стоят единицы, и снова — операция «а» над выделенной строкой. Количество единиц в ней не уменьшится, нулей и отрицательных чисел не появится, но все числа, большие 1, уменьшатся на 1. Через несколько таких шагов мы получим в выделенной строке одни единицы, и операция «а» довершает дело. Осталось только заметить, что такая «обработка» выделенной строки хотя и меняет числа в других (ещё не обработанных) строках, но эти числа остаются натуральными.

6. Сумма 10-и действительных чисел равна 5030. Доказать, что из этих чисел можно выбрать 4, сумма которых не меньше 2012.

Решение.

Упорядочим наши числа по возрастанию:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{10}.$$

Допустим, что

$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} < 2012.$$

Тогда

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 > 5030 - 2012 = 503 \cdot 10 - 503 \cdot 4 = 503 \cdot 6.$$

Поскольку

$$6x_6 \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_6 > 503 \cdot 6,$$

получаем

$$x_6 > 503.$$

Тогда

$$x_{10} \geq x_9 \geq x_8 \geq x_7 \geq x_6 > 503,$$

откуда

$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} > 503 \cdot 4 = 2012$$

вопреки предположению. Таким образом,

$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 2012,$$

что и требовалось.